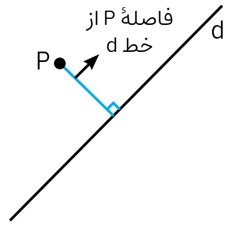
ناحیه‌های بیرون مجموع ثابت

محمدمهدی نسیمی

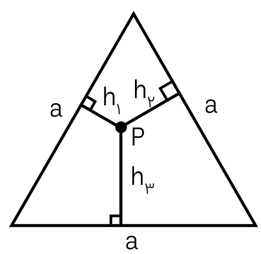
یادآوری گذشته

منظور از فاصلهٔ نقطه از خط، **طول کوتاه‌ترین پاره‌خط میان نقطه و خط** است. به کمک قضیهٔ **فیثاغورس** می‌دانیم که این پاره‌خط، همان **پاره‌خط عمود بر خط** است (شکل ۱).



شکل ۱

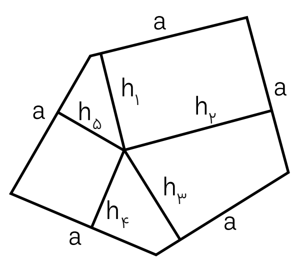
در شمارهٔ قبل دیدیم که مجموع فاصلهٔ هر نقطهٔ داخل مثلث متساوی‌الاضلاع از سه ضلع آن، مقدار ثابتی است (شکل ۲).



شکل ۲

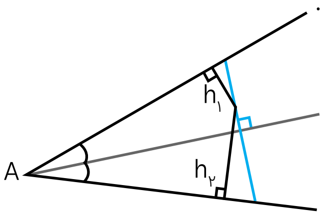
سپس از خود پرسیدیم که: «چه شکل‌های دیگری هم این ویژگی را دارند؟»

اسم این شکل‌ها را شکل‌های «مجموع ثابت» گذاشتیم. دیدیم که همهٔ چندضلعی‌های محدبی که طول ضلع‌هایشان با هم برابرند، مجموع ثابت هستند (شکل ۳).



شکل ۳

اما همهٔ شکل‌های مجموع‌ثابت این‌ها نیستند. مثلاً مستطیل مجموع‌ثابت است، اما طول ضلع‌هایش با هم برابر نیست. ادعا کردیم که متوازی‌الاضلاع مجموع‌ثابت است و هر چهارضلعی‌ای که مجموع‌ثابت باشد، حتماً متوازی‌الاضلاع است. برای اثبات قسمت دوم ادعا، ابتدا گزارهٔ دیگری را ثابت کردیم: «برای هر زاویهٔ داده‌شده، پاره‌خط داخل زاویه و عمود بر نیمساز، نسبت به دو ضلع زاویه مجموع‌ثابت است. یعنی مجموع فاصلهٔ هر نقطه روی این پاره‌خط از دو ضلع زاویه عدد ثابتی است» (شکل ۴).

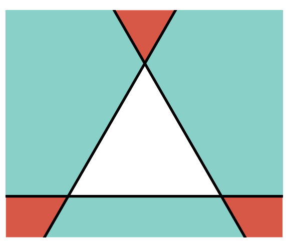


شکل ۴

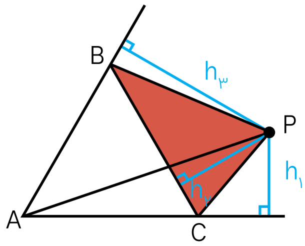
در این شماره ابتدا می‌بینیم که نه‌تنها داخل، بلکه بیرون شکل‌های مجموع‌ثابت هم به نحوی مجموع‌ثابت است! سپس یک روش برای ساخت n‌ضلعی‌های مجموع‌ثابت ارائه می‌دهیم.

بیرون شکل‌های مجموع‌ثابت

مثلث متساوی‌الاضلاعی را در نظر می‌گیریم. بیرون مثلث متساوی‌الاضلاع تحت تقارن، سه ناحیه وجود دارد: ناحیه‌های سبزرنگ، ناحیه‌های قرمزرنگ و امتداد اضلاع (شکل ۵).


شکل ۵

اگر نقطه در ناحیهٔ سبزرنگ باشد، شکلی شبیه به شکل ۶ پدید می‌آید.

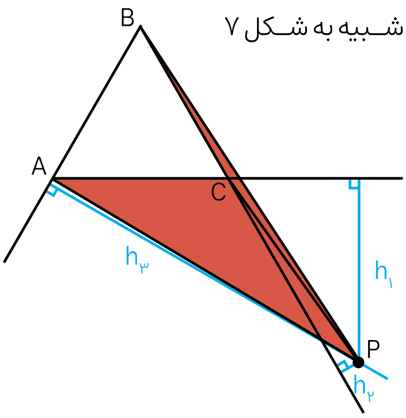


شکل ۶

$$S_{ABPC}-S_{BCP}=S_{ABC}$$
$$(S_{ABP}+S_{APC})-S_{BCP}=S_{ABC}$$
$$(\frac{1}{2}h_3\times a+\frac{1}{2}h_1\times a)-\frac{1}{2}h_2\times a=S_{ABC}$$
$$\frac{1}{2}a(h_3+h_1-h_2)=S_{ABC}$$
$$h_3+h_1-h_2=\frac{2S_{ABC}}{a}$$

که منظور از S_{ABC} مساحت مثلث ABC و طول ضلع آن a است. چون مثلث و طول ضلع آن ثابت هستند، سمت راست تساوی مقداری ثابت است.

اگر نقطه در ناحیهٔ قرمزرنگ باشد، شکلی شبیه به شکل ۷ پدید می‌آید.



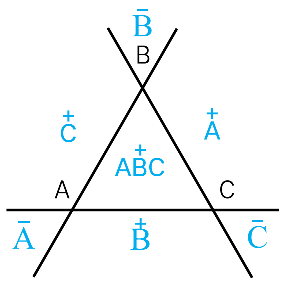
شکل ۷

$$S_{ABP}-S_{BCP}-S_{ACP}=S_{ABC}$$
$$\frac{1}{2}h_3\times a-\frac{1}{2}h_1\times a-\frac{1}{2}h_2\times a=S_{ABC}$$
$$\frac{1}{2}a(h_3-h_1-h_2)=S_{ABC}$$
$$h_3-h_1-h_2=\frac{2S_{ABC}}{a}$$

باز هم سمت راست تساوی همان مقدار ثابت $\frac{2S_{ABC}}{a}$ است.

به سوی زبان و نمادگذاری بهتر

به جای h_1، h_2 و h_3، ارتفاع روبه‌رو به رأس‌های A، B و C را به ترتیب h_a، h_b و h_c می‌نامیم. همچنین ناحیه‌های بیرون مثلث، داخل مثلث و روی ضلع‌ها یا امتداد آن‌ها را مانند شکل ۸ نام‌گذاری می‌کنیم. همچنین در تمام بحث، بررسی حالت‌هایی را که نقطهٔ P روی خط باشد، به شما واگذار می‌کنیم.



شکل ۸

جدول ۱ نتایج به‌دست آمده را جمع‌بندی کرده است.

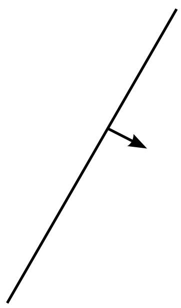
عبارت مجموع ثابت	ناحیه
$h_a+h_b+h_c$	$\overset{+}{ABC}$
$-h_a+h_b+h_c$	$\overset{+}{A}$
$h_a-h_b+h_c$	$\overset{+}{B}$
$h_a+h_b-h_c$	$\overset{+}{C}$
$h_a-h_b-h_c$	$\bar{A}$
$-h_a+h_b-h_c$	$\bar{B}$
$-h_a-h_b+h_c$	$\bar{C}$

جدول ۱

همان‌طور که می‌بینید، جدول ۱ پر از تبصره و حالت‌بندی است. چنین جدولی برای یک پنج‌ضلعی بسیار بزرگ‌تر می‌شود و کار با آن برای یک n ضلعی دلخواه به غایت مشکل است. چه خوب می‌شد اگر به جای عبارت‌های متفاوت تنها یک عبارت مجموع ثابت می‌داشتیم که برای همهٔ حالت‌ها برقرار می‌بود! اما چگونه؟

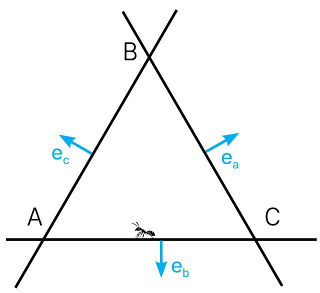
نقطهٔ P را درون مثلث تصور کنید. در این حالت عبارت $h_3+h_1+h_2$ مقداری ثابت است. نقطهٔ P را به آرامی حرکت دهید تا روی ضلع BC قرار گیرد. در این حالت داریم: $h_2=0$ و عبارت h_3+h_1 مقداری ثابت است. حالا نقطهٔ P را تا آن طرف ضلع BC حرکت دهید. در این صورت ضریب h_2 منفی می‌شود و $h_3+h_1-h_2$ مقداری ثابت است. این مشاهده به ما نوید یافتن زبان بهتری را می‌دهد.

ابتدا برای هر خط یک بردار در نظر می‌گیریم. خط صفحه را به سه بخش تقسیم می‌کند: یکی در جهت بردار، یکی روی خط و دیگری در خلاف جهت بردار (شکل ۹).



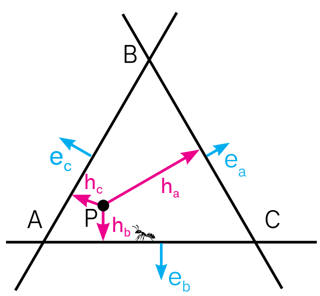
شکل ۹

مورچه‌ای را تصور کنید که روی محیط مثلث در جهت عقربه‌های ساعت حرکت می‌کند و به هر خط، بردارِ سمت پایین خود را نسبت می‌دهد. این‌گونه به طور یکتا به خط‌های مثلث بردار نسبت می‌دهیم. این بردارها را e_a، e_b و e_c می‌نامیم (شکل ۱۰).

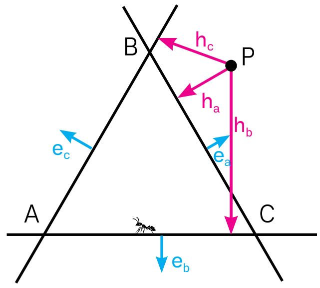


شکل ۱۰

همچنین مطابق شکل‌های ۱۱ الف و ب، به ارتفاع‌های خروجی از نقطهٔ P نیز در جهت خروج، بردار نسبت می‌دهیم.



شکل ۱۱ الف



شکل ۱۱ ب

$e_a \times h_a$ را این‌گونه تعریف کنید[1]:

$$e_a \times h_a = \begin{cases} h_a & \text{اگر } h_a \text{ با } e_a \text{ هم‌جهت باشد} \\ -h_a & \text{اگر } h_a \text{ با } e_a \text{ هم‌جهت نباشد} \end{cases}$$

این‌گونه برای هر نقطهٔ دلخواه P در هر جای صفحه، حاصل عبارت

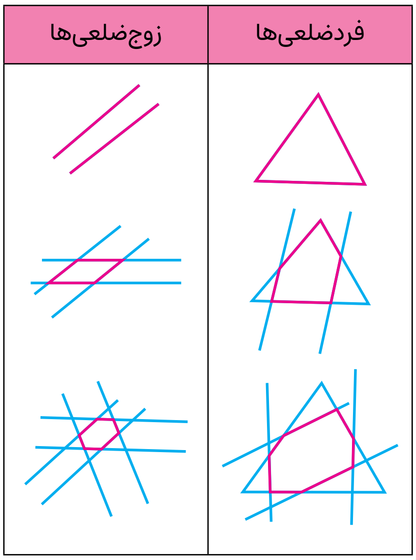
$$e_a \times h_a + e_b \times h_b + e_c \times h_c$$

مقداری ثابت است. برای مثال در شکل ۱۱ ب که متناظر با ردیف $\overset{+}{A}$ جدول است، h_a با e_a هم‌جهت نیست اما h_b با e_b و h_c با e_c هم‌جهت هستند که نتیجه همان $-h_a+h_b+h_c$ می‌شود.

این حکم به‌طور کلی برای تمام چندضلعی‌های مجموع‌ثابت برقرار است و برای هر نقطهٔ دلخواه P حاصل عبارت $e_a \times h_a + e_b \times h_b + e_c \times h_c + e_d \times h_d + \dots$ مقداری ثابت است. کار با این زبان جدید به مراتب راحت‌تر است. ما از اثبات حکم در حالت کلی می‌گذریم.

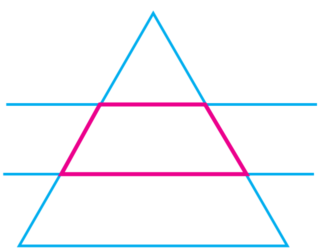
یک روش برای ساخت nضلعی‌های مجموع‌ثابت

با توجه به سلسله شکل‌های ۱۲، چون به‌روشنی هر جفت خط موازی مجموع‌ثابت است، روی هم گذاشتن این جفت خط‌های موازی نیز مجموع‌ثابت است. پس با شروع از مثلث متساوی‌الاضلاع و اضافه‌کردن جفت خط‌های موازی می‌توانیم دسته‌ای از فردضلعی‌های مجموع‌ثابت را و با شروع از یک جفت خط موازی، زوج‌ضلعی‌های مجموع‌ثابت را بسازیم.



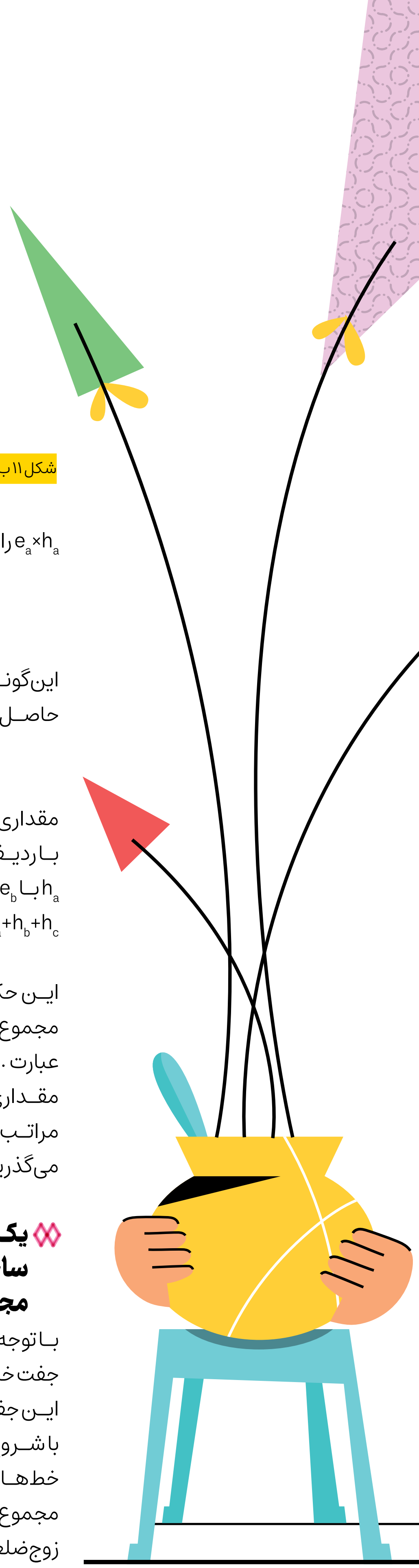
شکل ۱۲

البته در هر مرحله باید خط‌های جدید را به‌گونه‌ای اضافه کنیم که خط‌های قبلی از چندضلعی ما حذف نشوند. زیرا در این صورت ممکن است شکل جدید دیگر مجموع‌ثابت نباشد. شکل ۱۳ یک چندضلعی را نشان می‌دهد که دیگر مجموع‌ثابت نیست، زیرا خط‌های موازی یکی از ضلع‌های مثلث را حذف کرده‌اند.



شکل ۱۳

تا شمارهٔ بعدی سعی کنید در دنیای سه‌بعدی روشی برای ساخت nوجهی‌های مجموع‌ثابت ارائه دهید. چهاروجهی‌ها و پنج‌وجهی‌های مجموع‌ثابت چگونه‌اند؟



پی‌نوشت

۱. ما از نماد h_a گاه به‌عنوان بردار و گاه به‌عنوان طول بردار استفاده کرده‌ایم تا نمادها زیاد نشوند. در هر مورد با توجه به پس و پیش آن، غرض روشن است.